

Correction du baccalauréat S

Amérique du Nord 3 juin 2010

EXERCICE 1

4 points

1. a.

$$A(1; -2; 4) \quad B(-2; -6; 5) \quad C(-4; 0; -3).$$

$\vec{AB}(-3; -4; 1)$; $\vec{AC}(-5; 2; -7)$ or comme aucun de ces vecteurs n'est nul, s'ils étaient colinéaires, on pourrait trouver un seul k réel tel que

$$\begin{cases} -3 = -5k \\ -4 = 2k \\ 1 = -7k \end{cases}, \text{ or ce système est impossible (trois valeurs de } k \text{ différentes).}$$

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ est orthogonal à \vec{AB} car le produit scalaire est $-3+4-1=0$ le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ est orthogonal à \vec{AC} car le produit scalaire est égal à $-5-2+7=0$.

Donc le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ un vecteur normal au plan (ABC).

c. Une équation du plan (ABC) est de la forme $1 \times x + (-1) \times y + (-1) \times z + d = 0$, donc $x - y - z + d = 0$ or C doit être dans ce plan donc $-4 + 3 + d = 0$ donc $d = 1$, donc (ABC) : $x - y - z + 1 = 0$.

2. a. Si $M(x, y, z)$ est sur (D) alors \vec{OM} est colinéaire à \vec{n} , donc $\vec{OM} = t\vec{n}$

$$\begin{cases} x = t \times 1 \\ y = t \times (-1) \\ z = t \times (-1) \end{cases}. \text{ C'est une représentation paramétrique de la droite}$$

(D) passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Le point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) est à la fois sur

$$(D) \text{ et sur } (ABC) \text{ donc ses coordonnées vérifient } \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ x - y - z = -1 \end{cases};$$

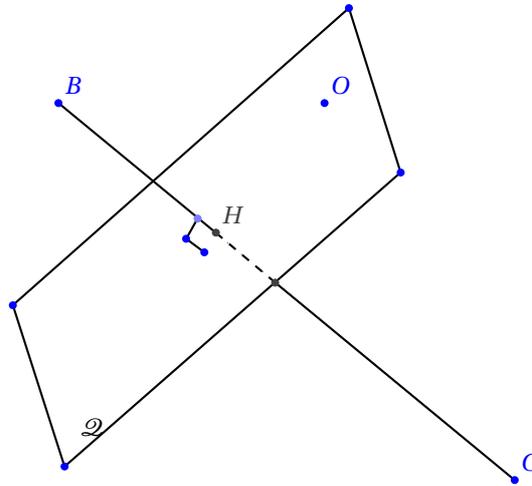
ce système est noté (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ 3t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases};$$

$$O'(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}).$$

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Donc H est l'intersection de (BC) avec le plan (Q) perpendiculaire à (BC), on a donc $\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0$ et $H \in (BC)$, donc $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = t \|\vec{BC}\|^2$.

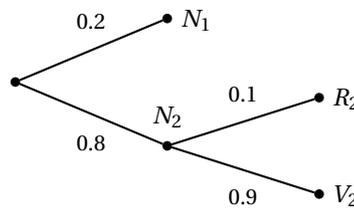
$$\text{Finalement : } t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2} \text{ (car } B \neq C).$$



- a. $\vec{OB} \cdot \vec{BC} = \vec{OH} \cdot \vec{BC} + \vec{HB} \cdot \vec{BC}$.
 Soit t le réel tel que $\vec{BH} = t\vec{BC}$.
 $\vec{OB} \cdot \vec{BC} = 0 - t \times (\vec{BC} \cdot \vec{BC})$.
 donc $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = t \times BC^2$.
 $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{BC^2}$
- b. On calcule ensuite avec les coordonnées $\vec{BO} \cdot \vec{BC}$ et BC^2
 $\vec{BO} (2 ; 6 ; -5)$ et $\vec{BC} (-2 ; 6 ; -8)$; $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = -4 + 36 + 40 = 72$; $BC^2 = 4 + 36 + 64 = 104$; $t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}$.
 $\vec{OH} = \vec{OB} + t\vec{BC}$.
 Donc \vec{OH} a pour coordonnées :
 $(-2 + \frac{9}{13} \times (-2); -6 + \frac{9}{13} \times (6); 5 + \frac{9}{13} \times (-8)) = (\frac{-44}{13}; \frac{-24}{13}; \frac{-7}{13})$.
 Ce sont aussi les coordonnées de H.

EXERCICE 2

3 points



Sur cet arbre N_1 c'est « tirer le numero 1 », N_2 c'est « tirer le numero 2 » R_2 c'est « tirer une rouge numérotée 2 », V_2 c'est « tirer une verte numérotée 2 »

1. La boule peut être rouge et porter le numéro 1, ou être rouge et porter le numéro 2 donc si on note R « la boule tirée est rouge », $R = N_1 \cup (N_2 \cap R_2)$, ceci est une réunion d'évènements disjoints car inclus dans N_1 et N_2 , donc $p(R) = p(N_1) + p(N_2 \cap R_2) = p(N_1) + p(N_2) \times p_{N_2}(R_2) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28$

2. Ici on veut $p_R(N_2)$ c'est $p_R(N_2) = \frac{p(N_2 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(N_2 \cap R_2)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,28} = \frac{2}{7}$

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne). On répète donc n fois l'expérience à deux issues : « tirer une rouge numérotée 1 » de probabilité $p = 0,2$ car c'est N_1 ou « ne pas tirer une rouge numérotée 1 » de probabilité 0,8, la variable aléatoire X qui sert à compter les succès (nombre de boules rouges sur les n tirages) est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,2)$.

Donc, pour k entier entre 0 et n , $p(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k}$

a. « Tirer au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages » a pour contraire « ne tirer aucune boule rouge portant le numéro 1 » de probabilité $p(X = 0)$ donc la probabilité demandée est

$$1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

b. Ceci revient à résoudre (n entier naturel) $1 - 0,8^n \geq 0,99$ ce qui est équivalent à $0,8^n \leq 0,01$, on prend les ln des deux membres qui sont strictement positifs

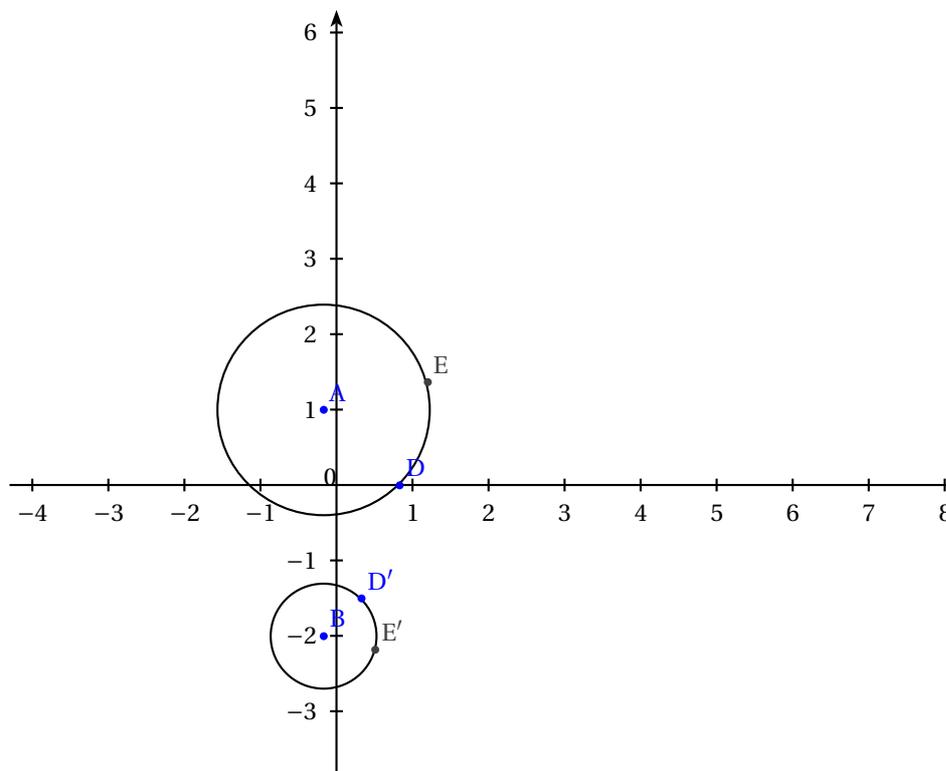
$$0,8^n \leq 0,01 \iff 0,8^n \leq 10^{-2} \iff n \ln(0,8) \leq -2 \ln(10) \iff n \geq \frac{-2 \ln(10)}{\ln(0,8)} \iff n \geq 20,6.$$

Il faut donc faire au moins 21 tirages.

EXERCICE 3

5 points

Enseignement obligatoire



1. Le point E est obtenu par rotation autour de A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ du point D donc

$$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) \text{ donc } z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(1 - i) + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (1 - i) + i =$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)(1 + i).$$

$$2. z_{D'} = \frac{2-i}{i+1} = \frac{(2-i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{1-3i}{2} = 0,5 - 1,5i.$$

3. a. Pour tout nombre complexe z différent de i ,

$$(z' + 2i)(z - i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z - i) = \left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z - i) = \frac{i}{iz+1} \times (z - i) = \frac{i}{i(z-i)} \times (z - i) = 1.$$

b. Donc pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$ en prenant les modules et les arg :

$$\text{Comme } (z' + 2i) = z_{\overrightarrow{BM'}}; (z - i) = z_{\overrightarrow{AM}}, \text{ et comme } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = \arg(z' + 2i)$$

$$\text{Ainsi que } (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \arg(z - i).$$

Pour tout point M d'affixe $z(z \neq i)$:

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. a. Les points D et E appartiennent à un même cercle (C) de centre A et de rayon par la rotation du 1) et le rayon est $AD = \sqrt{2}$.

b. Donc $AE = \sqrt{2}, AD = \sqrt{2}$ donc en utilisant la relation sur les longueurs : $AD \times BD' = 1, AE \times BE' = 1$ donc $BE' = BD' = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et avec les angles :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

et $(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AD}) = k' \times 2\pi$ où k' est un entier relatif., on retranche ces deux relations

$$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = k'' \times 2\pi \text{ où } k'' \text{ est un entier relatif.}$$

$$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) + \frac{\pi}{3} = k'' \times 2\pi \text{ où } k'' \text{ est un entier relatif.}$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k'' \times 2\pi \text{ où } k'' \text{ est un entier relatif.}$$

c. Ainsi le triangle $BD'E'$ est isocèle en B et avec un angle de $-\frac{\pi}{3}$, il est équilatéral indirect.

EXERCICE 3

5 points

Enseignement de spécialité

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(E): 16x - 3y = 4.$$

1. Le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E) : $16 \times 1 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$.

2.

$$(E): 16x - 3y = 16 - 4 \times 3.$$

$$\text{Donc } 16(x - 1) = 3(y - 4).$$

3 divise les deux membres et 3 premier avec 16 donc 3 divise $(x - 1)$ (GAUSS) : il existe j entier tel que $(x - 1) = 3j$ on a alors $16(3j) = 3(y - 4)$ donc $16j = (y - 4)$ donc $y = 16j + 4$, on vérifie $16 \times (3j + 1) - 3 \times (16j + 4) = 4$, donc

$$\mathcal{S} = \{(3j + 1; 16j + 4) | j \in \mathbb{Z}\}$$

Partie B

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z.$$

1. La transformation f est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{8}$.
2.
 - a. La transformation g est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}^4 = 4$, d'angle $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + 2\pi$.
 - b. Pour tout entier naturel n ,
 $M_{n+4} = f(M_{n+3}) = f \circ f(M_{n+2}) = f \circ f \circ f(M_{n+1}) = f \circ f \circ f \circ f(M_n) = g(M_n)$,
 donc $M_{n+4} = g(M_n)$
 $OM_{n+4} = 4OM_n$ et $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
 - c. $M_4 = g(M_0)$, $M_5 = g(M_1)$ et $M_6 = g(M_2)$
 donc $OM_4 = 4OM_0$ et $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_4}) = -\frac{\pi}{2}$
 $OM_5 = 4OM_1$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_5}) = -\frac{\pi}{2}$
 $OM_6 = 4OM_2$ et $(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_6}) = -\frac{\pi}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n , $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8})}$
 C'est une récurrence :
 pour $n = 0$; $z_0 = (\sqrt{2})^0 e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \times 0 \pi}{8})} = i$: vrai.
 Pour tout k un entier tel que $z_k = (\sqrt{2})^k e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \times k \pi}{8})}$ alors $z_{k+1} = \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{8}} z_k = \sqrt{2} \times e^{i\frac{3\pi}{8}} \times (\sqrt{2})^k e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \times k \pi}{8})}$
 On regroupe les racines de 2 en additionnant les exposants, les exposants des exponentielles s'additionnent aussi et $\frac{3 \times k \pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{3 \times (k+1)\pi}{8}$ donc $z_{k+1} = (\sqrt{2})^{k+1} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \times (k+1)\pi}{8})}$ ce qui prouve que si la proposition est vraie au rang k elle est vraie au rang $k+1$ donc, en fait :
 Pour tout entier naturel n , $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8})}$.
4.
 - a. $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}) = \arg(\frac{z_n}{z_p}) = \arg((\sqrt{2})^{n-p} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \times (n-p)\pi}{8})}) = (n-p) \times \frac{3}{8} \times \pi$.
 - b. Les points O , M_p et M_n sont alignés si et seulement si l'argument ci-dessus est un multiple de π si et seulement si $(n-p) \times \frac{3}{8}$ si et seulement si 8 divise $3(n-p)$, or 8 et 3 sont premiers entre eux donc 8 divise $3(n-p)$ si et seulement si 8 divise $(n-p)$ (GAUSS) si et seulement si $(n-p)$ est un multiple de 8.
5. L'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$ est l'ensemble des entiers naturels n tels $n \times \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = 2k\pi$, k entier, donc $3n+4 = 16k$ donc $16k - 3n = 4$ et on a vu qu'alors $n = 16j+4$ et $k = 3j+1$, j entier.
 On veut $n \in \mathbb{N}$, donc les entiers n cherchés vont de 16 en 16 à partir de 4 : ce sont 4 ; 20 ; 36 ; 52 ; ... suite arithmétique de raison 16.

EXERCICE 4

8 points

Partie A :

1. $\frac{4 \times e^x}{e^x \times (1 + 7e^{-x})} = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$, donc $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$ pour tout x de \mathbb{R} .
2.
 - a. La courbe \mathcal{C}_1 admet deux asymptotes car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{7e^{-x} + 1} = \frac{4}{0+1} = 4$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 7} = \frac{0}{0+7} = 0$
 Donc en $-\infty$ asymptote à \mathcal{C}_1 : la droite horizontale d'équation $y = 0$.
 Donc en $+\infty$ asymptote à \mathcal{C}_1 : la droite horizontale d'équation $y = 4$.

b. $f_1'(x) = \frac{4 \times 7e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2}$, donc $f_1'(x) > 0$.

f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	
f_1	0	4

Par ce tableau on prouve que $0 < f_1(x) < 4$ pour tout x de \mathbb{R} car f_1 est strictement croissante et voir ses limites aux bornes.

3. a. On doit prouver que $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$ pour prouver que $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe (d'une fonction f définie sur \mathbb{R}).

$$\text{Soit } h \in \mathbb{R}, f_1(\ln(7) + h) = \frac{4}{7e^{-\ln(7)-h} + 1} = \frac{4}{7e^{+\ln(\frac{1}{7})-h} + 1} = \frac{4}{7e^{\ln(\frac{1}{7})}e^{-h} + 1} = \frac{4}{7 \times \frac{1}{7} \times e^{-h} + 1} = \frac{4}{e^{-h} + 1}$$

$$\text{En changeant } h \text{ en } -h \text{ on obtient : } f_1(\ln(7) - h) = \frac{4}{e^h + 1},$$

on additionne et divise par 2 :

$$\frac{f_1(\ln(7)+h)+f_1(\ln(7)-h)}{2} =$$

$$\frac{\frac{4}{e^h+1} + \frac{4}{e^{-h}+1}}{2} =$$

$$\frac{\frac{4}{e^h+1} + \frac{4e^h}{1+e^h}}{2} =$$

$$\frac{4e^h + 4}{2(1+e^h)} = \frac{4(e^h + 1)}{2(1+e^h)} = 2$$

Donc $I_1(\ln(7); 2)$ est centre de symétrie de \mathcal{C}_1

b. $f'(\ln(7)) = \frac{4 \times 7e^{-\ln(7)}}{(1+7e^{-\ln(7)})^2} = \frac{28e^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7e^{\ln(\frac{1}{7})})^2} = \frac{28 \frac{1}{7}}{(1+7 \frac{1}{7})^2} = \frac{4}{2^2} = 1,$

$f_1(\ln(7)) = 2$ d'après le 3. a. avec $h = 0$, donc l'équation de la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_1 au point $I_1 : y = 1(x - \ln(7)) + 2; y = x - \ln(7) + 2$.

- c. Au point d'ordonnée 2 de \mathcal{C}_1 , on trace une droite (rouge) de coefficient directeur 1 par la méthode de l'escalier.

4. a. Une primitive de la fonction $f_1 : x \mapsto 4 \times \frac{e^x}{7+e^x}$ sur \mathbb{R} est

la fonction $F_1 : x \mapsto 4 \times \ln(7+e^x)$.

- b. La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0; \ln 7]$ est

$$\frac{1}{\ln(7)} \times (4 \times \ln(7+e^{\ln(7)}) - 4 \ln(e^0 + 7)) = \frac{4}{\ln(7)} \times \ln\left(\frac{14}{8}\right) = \frac{4}{\ln(7)} \times \ln\left(\frac{7}{4}\right).$$

Partie B :

1. On remarque d'abord que $f_n(x) = f_1(nx)$ pour tout x de \mathbb{R} . Pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n si et seulement si $f_n(0) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $f_1(n \times 0) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $f_1(0) = \frac{1}{2}$ or $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2. a. Pour tout entier naturel n non nul la courbe \mathcal{C}_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection : on résout $f_n(x) = 2$

$$f_n(x) = 2 \iff 4e^{nx} = 2e^{nx} + 14 \iff e^{nx} = 7 \iff nx = \ln(7) \iff x =$$

$$\frac{\ln(7)}{n} \text{ (ici } n \in \mathbb{N}^*). \quad \boxed{x = \frac{\ln(7)}{n}}$$

$$\text{b. } f'_n(x) = n \times f'_1(nx) = \frac{4n \times 7e^{-nx}}{(1+7e^{-nx})^2}, \text{ donc si } x = \frac{\ln(7)}{n}, f'_n\left(\frac{\ln(7)}{n}\right) = \frac{4n \times 7e^{-n \frac{\ln(7)}{n}}}{(1+7e^{-n \frac{\ln(7)}{n}})^2} =$$

$$n \times \frac{4 \times 7e^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7e^{\ln(\frac{1}{7})})^2} = n \times \frac{4 \times 1}{(1+7 \times \frac{1}{7})^2} = n \times \frac{4}{(1+1)^2} = n.$$

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe \mathcal{C}_n au point I_n est

$$y = n(x - \frac{\ln(7)}{n}) + 2 = nx - \ln(7) + 2,$$

elles coupent toutes l'axe des y à la même ordonnée à l'origine.

c. Les droites (T_2)(gris) et (T_3)(rose).

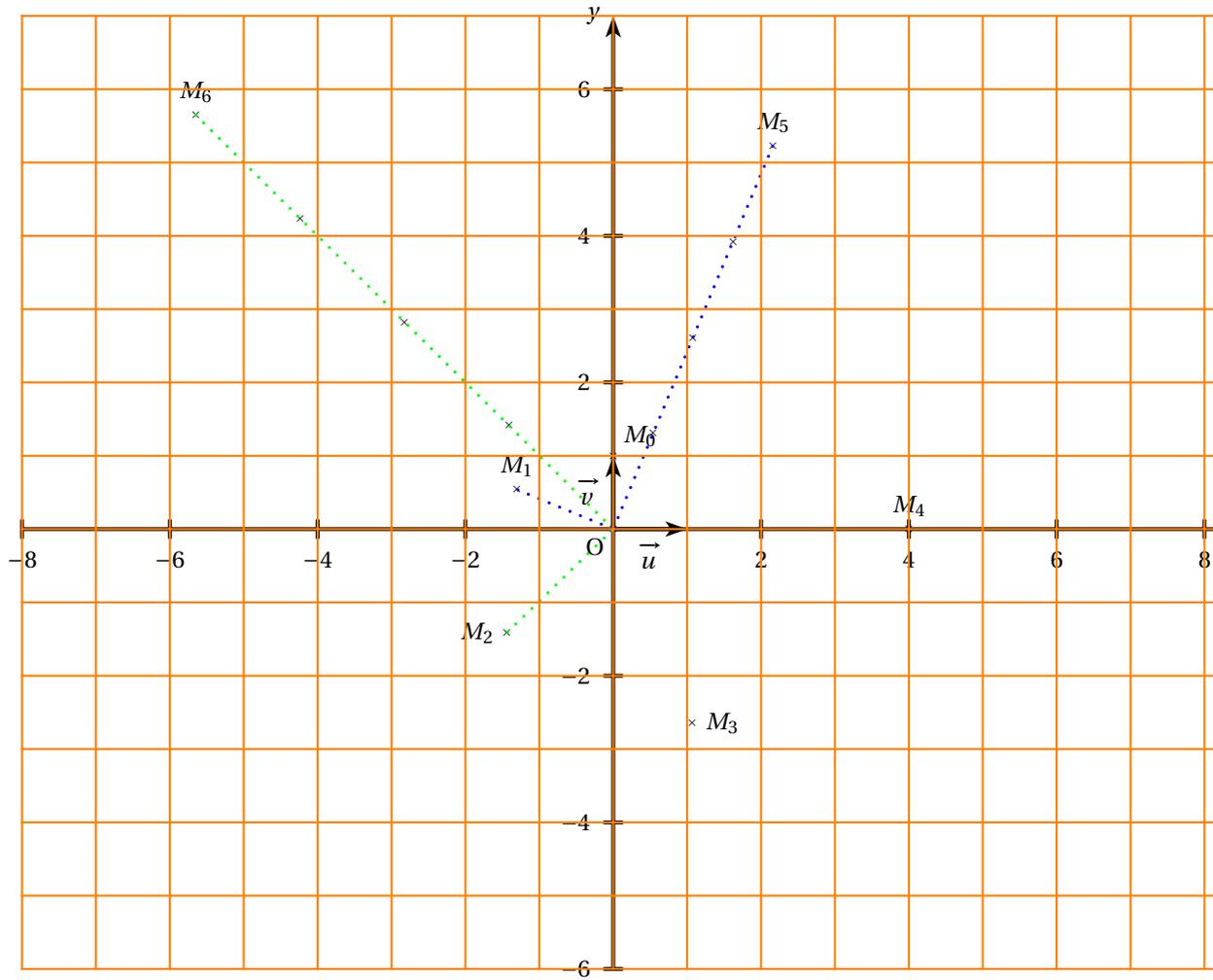
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) dx.$$

une primitive de f_n c'est $F_n(x) = \frac{4}{n} \ln(e^{nx} + 7)$ donc $u_n = \frac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n} \times (\ln(e^{n \times \frac{\ln 7}{n}} + 7) - \ln(8)) = \frac{4}{\ln 7} \times (\ln(e^{\ln 7} + 7) - \ln(8)) = \frac{4}{\ln 7} \times (\ln(14) - \ln(8)) = \frac{4}{\ln 7} \times (\ln(\frac{14}{8})) = \frac{4}{\ln 7} \times (\ln(\frac{7}{4}))$ qui ne dépend pas de n .

La suite (u_n) est constante.

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4

